Francesc Bars Cortina

Uns apunts de càlcul matricial i resolució de sistemes lineals.

UAB, 4 d'octubre de 2011

Contingut

Introducció

Aquestes notes volen ser únicament un complement pel nou estudiant universitari en facilitar el seu aprenentatge en el llenguatge matemàtic utilitzat a la universitat.

Les notes són bàsicament uns preliminars i una presentació al llibre de l'Enric Nart [2]. Igualment són una presentació matricial a la part d'àlgebra lineal de les notes de'n Agustí Reventós, veieu CV grau EQ.

Nota pels estudiants: la secció 1.4.3 és molt important per a aplicacions estadístiques, per moltes titulacions llevat d'Estadística i Matemàtiques aquesta secció és totalment opcional.

Capítol 1

Matrius i sistemes d'equacions lineals

1.1 Matrius.

Per a nosaltres K vol dir uns "bons" números, penseu que K pot ser $\mathbb{R}$ o bé $\mathbb{C}$ o bé $\mathbb{Q}$ (també K pot ser qualsevol conjunt de números que tingui dues operacions $+$ i producte amb les propietats 1.1.19 [1]).

1.1.1 Definició matriu i operacions amb matrius

Una matriu a coeficients en K (o entrades en K) és una taula rectangular d'elements de K que escriurem entre parèntesi.
Per exemple $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ és una matriu a coeficients en $\mathbb{R}$ (també és a coeficients en $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{C}$).

Fixem-nos que una matriu concreta té un nombre fix de files i columnes, per exemple en la matriu anterior tenim que té dues files i tres columnes.

Definició 1.1.1. *Una matriu $m \times n$ a coeficients en K és una taula rectangular d'elements de K amb m files i n columnes. Denotem per $M_{m\times n}(K)$ el conjunt de totes les matrius $m \times n$ amb entrades a K i es diu que aquestes matrius tenen tamany $m \times n$.*

Per exemple podem escriure ara $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Usualment s'expressa una matriu $m \times n$ mitjançant:

$$A = (a_{i,j}),\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

on $a_{i,j} := coeficient\ es\ troba\ a\ la\ fila\ i\ i\ columna\ j\ de\ la\ matriu\ A$.

En l'exemple anterior, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ tenim que $a_{1,2} = -3$, $a_{2,3} = -4$, $a_{3,1}$ no té sentit.

La *matriu transposada* d'una matriu $A \in M_{m\times n}(K)$ és la matriu $A^t \in M_{n\times m}(K)$ que s'obté escrivint ORDENADAMENT les files de A en columna. Si escrivim $A=(a_{i,j})$ tenim que $A^t=(b_{i,j})$ on $b_{i,j}:=a_{j,i}$.

Donada $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$ tenim que $A^t=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -3 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Una *matriu quadrada* de mida n és una matriu $n\times n$. Denotem $M_n(K)$ el conjunt $M_{n\times n}(K)$.

La *matriu zero* de mida $m\times n$ és la matriu on totes les entrades valen zero.

Una matriu quadrada $D=(d_{i,j})$ de tamany $n\times n$ s'anomena *diagonal* si compleix $d_{i,j}=0$ si $i\neq j$.

La *matriu identitat* de mida $n\times n$ o de mida n és la matriu quadrada diagonal $I_n=(1_{i,j})$ on $1_{i,j}=0$ si $i\neq j$ i $1_{i,i}=1$, és a dir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Anem a fer operacions amb matrius:

Suma de matrius

Sol es defineix la suma per dues matrius A i B del mateix TAMANY.

Donades $A=(a_{i,j})$ i $B=(b_{i,j})$ matrius de $M_{m\times n}(K)$ es defineix la matriu suma $A+B$ (que també té tamany $m\times n$ mitjançant:

$$A+B=(c_{i,j}),\ amb\ c_{i,j}:=a_{i,j}+b_{i,j}.$$

Sumem les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$ amb $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ tenim llavors:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+1 & -3+2 & 5+3\\ 3+4 & 1+5 & -4+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 8\\ 7 & 6 & 2\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

L'operació $+$ té les següents propietats:
Donades $A,B,C\in M_{m\times n}(K)$ tenim,

1. $A+B=B+A$

2. $A+(B+C)=(A+B)+C$

3. $A+0=0+A=A$ on 0 és la matriu zero de tamany $m\times n$.

Producte d'una matriu per un escalar Donat un número $\mu\in K$ i una matriu $A\in M_{m\times n}(K)$ es defineix la matriu μA també de tamany $m\times n$ per:

$$\mu A=(c_{i,j}),\ amb\ c_{i,j}:=\mu a_{i,j}.$$

Per exemple si $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$ tenim que $\frac{1}{5}A=\begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 & 1\\ 3/5 & 1/5 & -4/5\end{pmatrix}$.

Fixem-nos $A - B := A + (-1)B$.

Té les següents propietats:

Siguin μ, l números de K, i A, B matrius de tamany $m \times n$,

1. $\mu(lA) = (\mu l)A$
2. $\mu(A + B) = \mu A + \mu B$
3. $A + (-1)A = 0$ on 0 denota la matriu zero de tamany $m \times n$.

Notació important

Donada una matriu A de tamany $m \times n$ escriurem també

$$A = \begin{pmatrix} Fila1 \\ \hline Fila2 \\ \hline \ldots \\ \hline Fila\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Columna1 \mid & Columna2 \mid & \vdots & \mid Columna\ n \end{pmatrix}.$$

Producte de matrius

Donades dues matrius A de tamany $m \times n$ i B de tamany $s \times r$ direm que és poden multiplicar i formar la matriu AB únicament en el cas que $n = s$!!!! és a dir el nombre de columnes de A=nombre de files de B. Anem-ho a definir:

Donada $A \in M_{m\times n}(K)$ i $B \in M_{n\times r}(K)$ definim $AB = (c_{i,j})$ MATRIU DE TAMANY $m \times r$ de la següent forma:

$$c_{i,j} := a_{i,1}b_{1,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j},$$

observeu que $c_{i,j} =< Fila\ i\ de\ A, Columna\ j\ de\ B >$ el producte escalar.

Fem-ne un exemple: considerem $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Tè sentit AB? i BA?. En els casos afirmatius calculeu-ne la matriu.

A té tamany 2×3 i B tamany 3×3 per tant AB té sentit, però en canvi BA no té sentit. Calculem ara doncs AB serà una matriu 2×3:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 35 & 45 \\ -14 & -16 & -18 \end{pmatrix},$$

fixeu-vos que per exemple

$$-18 =< Fila\ 2\ de\ A, Columna\ 3\ de\ B >= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

FET IMPORTANT: A vegades AB té sentit i BA no en té i viceversa. A vegades AB i BA tenen sentit per exemple quan A i B són matrius quadrades del mateix tamany però USUALMENT $AB \neq BA$, IMPORTA SI ES MULTIPLICA PER UN CANTÓ O PER L'ALTRE COSTAT!!!!!!

Reinterpretació del producte de matrius

Donada $A=(a_{i,j})\in M_{m\times n}(K)$ i $B=(B_{i,j})\in M_{n\times r}$ podem formar AB (pel que hem fet abans). Denotem aquí $A_{i,*}:=$ *Fila i de la matriu A*, $A_{*,j}:=$ *Columna j de A*, $B_{i,*}:=$ *Fila i de lamatriu B*, $B_{*,j}:=$ *Columna j de B.*

Fixeu-vos que podem fer la següent interpretació:

$$\textit{Fila } i \textit{ de la matriu } AB = a_{i,1}\textit{Fila } 1 \textit{ de } B + a_{i,2}\textit{Fila } 2 \textit{ de } B + \ldots + a_{i,n}\textit{Fila } n \textit{ de } B =$$

$$a_{i,1}B_{1,*}+a_{i,2}B_{2,*}+\ldots+a_{i,n}B_{n,*}$$

Igualment tenim:

$$\textit{Columna } j \textit{ de la matriu } AB = b_{1,j}\textit{Columna } 1 \textit{ de } A + \ldots + b_{n,j}\textit{Columna } n \textit{ de } A =$$

$$b_{1,j}A_{*,1}+b_{2,j}A_{*,2}+\ldots+b_{n,j}A_{*,n}$$

En l'exemple que feiem abans amb $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, obteniem que $AB=\begin{pmatrix} 25 & 35 & 45\\ -14 & -16 & -18\end{pmatrix}$ $(*)$ fixeu-vos que ara tenim la següent interpretació de les files i columnes de AB, per exemple:

la fila 2 de AB s'escriu per:

$$\begin{pmatrix} -14 & -16 & -18\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6\end{pmatrix} (*)$$

Definició 1.1.2. *Una K-combinació lineal d'una família d'objectes és el resultat de sumar aquests objectes multiplicats cadascun per algun número de K.*

Definició 1.1.3. *Diem que unes files del mateix tamany són K-linealment independents si no hi ha cap K-combinació lineal NO TRIVIAL d'elles que doni la fila igual a zero (és a dir no hi ha cap combinació lineal que doni la fila zero a excepció de multiplicar totes les files per zero). Diem que unes columnes del mateix tamany són K-linealment independents si no hi ha cap K-combinació lineal NO TRIVIAL d'elles que doni la columna igual a zero(és a dir no hi ha cap combinació lineal que doni la columna zero a excepció de multiplicar totes les columnes per zero).*

Fixeu-vos: VEIEM QUE LES FILES DE AB SON COMBINACIO LINEAL DE LES FILES DE B i els nombres de la combinació lineal (és a dir els numeros que multipliquen) es troben en una fila de la matriu A; més concretament la fila i de AB s'obté com combinació lineal de les files de B i aquesta combinació lineal es troba en la fila i de A (en l'exemple (*) és amb $i=2$ fila)!!!

Escrivim la columna 2 de AB de la (*) en aquesta reinterpretació:

$$\begin{pmatrix} 35\\ -16\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2\\ 3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3\\ 1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 5\\ -4\end{pmatrix} (**)$$

Fixeu-vos: VEIEM QUE LES COLUMNES DE AB SON COMBINACIO LINEAL DE LES COLUMNES DE A i els nombres de la combinació lineal (és a dir els numeros que multipliquen) es troben en una columna de la matriu B; més concretament la columna j de AB s'obté com combinació lineal de les columnes de A i aquesta combinació lineal es troba en la columna j de B (en l'exemple (**) és amb $j = 2$ columna)!!!

Anem a llistar algunes propietats del producte de matrius:

1. $A(BC) = (AB)C$ amb $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times r}(K)$ i $C \in M_{r\times s}(K)$.

2. $A(B+C) = AB+AC$ amb $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times r}(K)$ i $C \in M_{n\times r}(K)$

3. $(A + B)C = AC + BC$ amb $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{m\times n}(K)$ i $C \in M_{n\times s}(K)$

4. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$ amb $\lambda \in K$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times r}(K)$.

5. $(AB)^t = B^t A^t$ amb $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times r}(K)$.

6. $AI_n = I_n A = A$ amb $A \in M_n(K)$.

Diem que una matriu quadrada $A \in M_n(K)$ és **invertible** si existeix una matriu quadrada, diem-li $Inv(A)$ on $AInv(A) = Inv(A)A = I_n$. Si existeix aquesta matriu $Inv(A)$ és única i l'anotarem A^{-1}. (NO SEMPRE EXISTEIX LA INVERSA D'UNA MATRIU QUADRADA). A més si tenim A quadrada i trobem una matriu quadrada $\tilde{D}$ on $A\tilde{D} = I_n$ o $\tilde{D}A = I_n$ per força es té que $\tilde{D} = A^{-1}$.

OBSERVACIÓ: Una matriu invertible no té cap fila idènticament nul.la. Una matriu invertible no té cap columna idènticament nul.la.

1.2 Algoritme d'esglaonament en files i columnes

1.2.1 Esglaonament en files

Hi ha tres tipus de *t*ransformacions elementals per files d'una matriu $A \in M_{m\times n}(K)$, denotem per $F_i :=$ fila i de la matriu A:

1. Intercanviar dues files de la matriu. Intercanviar la fila i per la fila j, i aquesta transformació elemental l'escriurem $F_i \longleftrightarrow F_j$.

2. Multiplicar una fila per un escalar NO NUL. Multiplicar la fila i de A per l'escalar $\lambda \neq 0$, i aquesta transformació elemental l'anotem λF_i.

3. Sumar a una fila de la matriu una altra fila DIFERENT, multiplicada per un escalar. Per exemple sumar la fila i el resultat de multiplicar la fila j ($j \neq i$) per λ, i anotem aquesta transformació elementatl $\lambda F_j \to F_i$.

Anem a fer un exemple iterant transformacions elementals:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow^{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow^{3F_3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{-F_1 \to F_3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = A'.$$

FET IMPORTANT: Siguin $F_1, \ldots, F_m$ les files de A. I a partir de A anem iterant transformacions elementals en files fins a trobar una matriu A'. Anomenem per $F'_1, \ldots, F'_m$ les files de A'. Llavors totes les combinacions lineals que es poden fer en $F_1, \ldots, F_m$ també s'obtenen com a combinacions lineals (canviant segurament els numeros de la combinació lineal) de les files de A' i viceversa. (La justificació d'aquest fet serà que podem desfer el procès endarera d'una A' a una A mitjançant transformacions elementals i via la proposició següent es transforma a que $A' = PA$ on per tant les files de A' son combinació lineal de A, i també del fet de poder desfer el procés via transformacions elementals que $A = P^{-1}A'$ i per tant les files de A són combinació lineal de les files de A').

En l'exemple tenim que $(2, 5, -8)$ és combinació lineal de les files de A donada per:

$$-1(2, -3, 5) + 1(3, 1, -4) + 1(1, 1, 1) = (2, 5, -8)$$

el fet anterior ens diu que també es combinació lineal de les files de A' efectivament observem (com calcular-ho ja ho farem més endavant):

$$(2, 5, -8) = \frac{4}{3}(3, 1, -4) - 1(2, -3, 5) + \frac{1}{3}(0, 2, 7).$$

Quina relació hi ha entre A i la matriu que s'obté A' d'aplicar-hi una col.lecció finita de transformacions elementals en files?

Proposició 1.2.1. *Donada una matriu A de tamany $m \times n$ i hi fem una col.leccio finita de transformacions elementals en files i obtenim una altra matriu del mateix tamany A'. Llavors existeix una matriu invertible P de tamany $m \times m$ on $PA = A'$.*

En l'exemple anterior tenim que hi ha una matriu 3×3 que compleix

$$P \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

I com trobem P? Fixeu-vos que amb la reinterpretació del producte les files de A' son combinació lineal de les files de A i la combinació lineal es troba en les files de P, COM TROBAR-HO? Molt fàcil:

ALGORITME PER A TROBAR P:

Sigui $A \in M_{m \times n}(K)$

Escrivim $(A \mid I_m)$ i fem les operacions elementals en aquesta matriu ampliada en tota la fila i s'obté $(A' \mid P)$

Anem-ho a fer amb l'exemple:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i repetim les transformacions elementals de passar de A en A' però amb la matriu:

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{3F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{-F_1 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) = (A' \mid P)$$

per tant obtenim que $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ i compleix que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

és a dir $PA = A'$.

Fixeu-vos que les files de P porten informació de combinació lineal, mirem la tercera fila de P que és $(0, -1, 3)$ i observeu:

(3era fila de A')=0 (Fila 1 de A)-1 (Fila 2 de A)+ 3 (Fila 3 de A)

és a dir:

$$(0, 2, 7) = 0(2, -3, 5) - 1(3, 1, -4) + 3(1, 1, 1).$$

Observació 1.2.2. *Hem observat abans que* $(2, 5, -8)$ *pensat com una fila és una combinació lineal de les files de* A *on* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *mitjançant:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$-1Fila_1(A) + 1Fila_2(A) + 1Fila_3(A) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Acavem de trobar P *on* $PA = A'$ *amb* P *invertible, per tant* $A = P^{-1}A'$ *pel fet de ser invertible,* P^{-1} *és la matriu següent (on com calcular-ho ho farem en les properes pàgines)* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$*, per tant*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A = (\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1})A' = \begin{pmatrix} 4/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix} A' =$$

$$4/3Fila_1(A') - 1Fila_2(A') + 1/3Fila_3(A').$$

Definició 1.2.3. *Si la fila* i *d'una matriu* A *no és tota de zeros, anomenem pivot de la fila el primer element no nul d'aquesta (amb ordre d'esquerra a dreta); denotem per* c_i *la columna que ocupa aquest pivot.*

Diem que una matriu $A \in M_{m\times n}(K)$ *està esglaonada per files si les files nul.les ocupen les darreres posicions (en cas de tenir-ne) i les files no zero satisfan:*

$$c_1 < c_2 < c_3 < \dots$$

Fem uns exemples:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & -4 \\ \boxed{2} & -3 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 7 \end{pmatrix}, \ tenim\ c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = 2\ No\ esglaonada\ files$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{3} & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ c_1 = 2,\ c_2 = 4,\ c_3 = 5 \ \textit{Esglaonada en files.}$$

Proposició 1.2.4. *Tota matriu $A \in M_{m\times n}(K)$ es pot transformar mitjançant transformacions elementals en files en una matriu esglaonada en files de tamany $m \times n$.*

Algoritme per a portar una matriu A a una esglaonada en files (algoritme iteratiu):

Consta de quatre passos:

1er pas: Triar la columna més a l'esquerra diferent de zero i triar un núnero d'aquesta columna diferent de zero que li diem pivot.

2on pas: Fent un canvi de files (operació elemental en files) possar el pivot triat al 1er pas a la fila de dalt de tot.

3er pas: Mitjançant l'operació $\lambda F_i \to F_j$ possar zeros a sota del pivot (en tota la columna que ocupa),

4rt pas: Eliminar la fila del pivot i totes les de sobre (però que continuarem escrivint!!!) i mirar si queda alguna fila a la matriu diferent de zero, si es que no ja hem acabat l'algoritme. Si es que hi ha files que no són zero tornem al 1er pas.

Anem a aplicar-ho a la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,trobem-hi una esglaonada en files:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} =^{1er\ pas+2on\ pas} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow_{\frac{-2}{3}F_1 \to F_2,\ 3er\ pas}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & -4 \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} =^{quart\ pas} \left(\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 1 & -4 \\ \hline 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} \\ 0 & 2 & 7 \end{array}\right) =^{1er\ pas}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 1 & -4 \\ \hline 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} \\ 0 & \boxed{2} & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{F_2 \leftrightarrow F_3,\ 2on\ pas} \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -4 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 7 \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} \end{array}\right) \rightsquigarrow_{\frac{11}{6}F_2 \to F_3,\ 3er\ pas}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 1 & -4 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 7 \\ 0 & 0 & \frac{23}{3} + \frac{77}{6} \end{array}\right) =^{4rt\ Pas} \left(\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 1 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & 7 \\ \hline 0 & 0 & \frac{123}{6} = \frac{41}{2} \end{array}\right) =^{1er\ Pas+2on\ Pas}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 1 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & 7 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{41/2} \end{array}\right) =^{3er\ pas+4rt\ Pas} \left(\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 1 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{41/2} \\ \hline \end{array}\right)$$

ens hem quedat sense matriu per tant aquesta última matriu està esglaonada per files.

Observació 1.2.5. *Fixeu-vos que d'una matriu A hem obtingut una matriu esglaonada en files diem-la E mitjançant l'anterior algoritme que únicament usa transformacions elementals en files, per tant sabem que existeix una P invertible on*

$$PA = E.$$

Per tal de calcular la P fem aquest algoritme que porta A a E en la matriu $(A|I_m)$ enlloc de A fins a arribar a obtenir $(E|P)$. (Pero en cap cas esglaoneu $(A|I_m)$, és a dir fer algoritme esglaonament per A pensant que la matriu després de la barra és informació complementària)

Per exemple si ho fem en l'exemple anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =^{1er\ pas+2on\ pas} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 01 & 0 & \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{\frac{-2}{3}F_1 \to F_2,\ 3er\ pas}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =^{quart\ pas} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =^{1er\ pas}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{F_2 \leftrightarrow F_3,\ 2on\ pas} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{23}{3} & -2/3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{\frac{11}{6}F_2 \to F_3,\ 3er\ pas}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{23}{3}+\frac{77}{6} & -2/3 & 1 & 11/6 \end{array}\right) =^{4rt\ Pas} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 7 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \frac{123}{6}=\frac{41}{2} & -2/3 & 1 & 11/6 \end{array}\right) =^{1er\ Pas+2on\ Pas}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 7 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{41/2} & -2/3 & 1 & 11/6 \end{array}\right) =^{3er\ pas+4rt\ Pas} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{41/2} & -2/3 & 1 & 11/6 \\ \hline \end{array}\right)$$

i per tant tenim $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2/3 & 1 & 11/6 \end{pmatrix}$ *i obtenim:*

$$P \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{41/2} \end{pmatrix}$$

1.2.2 Esglaonament en columnes

En columnes podem fer una teoria semblant a l'anterior però per manca de temps no ho fem a classe, seria útil per a controlar K-combinacions lineals de columnes i/o K-linealment independència. Si es que ens interessa fer aquest control en algun moment per una matriu A: considereu A^t on heu transformat les columnes de A en les files de A^t i estudieu ara com a files com hem fet en l'apartat anterior amb A^t.

Deixeu-me però passar-vos per escrit la teoria d'esglaonament en columnes:

Hi ha tres tipus de $t$ransformacions elementals per columnes d'una matriu $A \in M_{m\times n}(K)$, denotem per $C_i :=$ columna i de la matriu A:

1. Intercanviar dues columnes de la matriu. Intercanviar la columna i per la columna j, i aquesta transformació elemental l'escriurem $C_i \longleftrightarrow C_j$.
2. Multiplicar una columna per un escalar NO NUL. Multiplicar la columna i de A per l'escalar $\lambda \neq 0$, i aquesta transformació elemental l'anotem λC_i.
3. Sumar a una columna de la matriu una altra columna DIFERENT, multiplicada per un escalar. Per exemple sumar la columna i el resultat de multiplicar la columna j ($j \neq i$) per λ, i anotem aquesta transformació elemental $\lambda C_j \to C_i$.

Anem a fer un exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow^{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow^{3C_3} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 15 \\ 1 & 3 & -12 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{-C_1 \to C_3} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 18 \\ 1 & 3 & -13 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A'.$$

FET IMPORTANT: Si $C_1, \ldots, C_n$ son les columnes de A i fem transformacions elementals en columnes en A fins a trobar una A' amb columnes $C'_1, \ldots, C'_n$ llavors totes les combinacions lineals que es poden fer en $C_1, \ldots, C_n$ també s'obtenen com a combinacions lineals (canviant segurament els numeros de la combinació lineal) de les columnes de A' i viceversa.

En l'exemple anterior tenim que $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ és combinació lineal de les columnes de A donada per:

$$-1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el fet Important anterior ens afirma que també es combinació lineal de les columnes de A'; efectivament observem:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Quina relació hi ha entre A i la matriu que s'obté A' d'aplicar-hi una col.lecció finita de transformacions elementals en columnes?

Proposició 1.2.6. *Donada una matriu A de tamany $m \times n$ i hi fem una col.leccio finita de transformacions elementals en columnes i obtenim una altra matriu del mateix tamany A'. Llavors existeix una matriu invertible Q de tamany $n \times n$ on $AQ = A'$.*

En l'exemple anterior tenim que hi ha una matriu 3×3 que compleix

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 18 \\ 1 & 3 & -13 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

I com trobem Q? Fixeu-vos que amb la reinterpretació del producte les columnes de A' son combinació lineal de les columnes de A i la combinació lineal es troba en les columnes de Q, COM TROBAR-HO? Molt fàcil:

ALGORITME PER A TROBAR Q:

Sigui $A \in M_{m\times n}(K)$

Escrivim $\left(\frac{A}{I_n}\right)$ i fem les operacions elementals en columnes en aquesta matriu ampliada en tota la columna i s'obté $\left(\frac{A'}{Q}\right)$

Anem-ho a fer amb l'exemple:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i repetim les transformacions elementals en columnes de passar de A en A' en l'exemple anterior en columnes però ara amb la matriu:

$$\left(\frac{A}{I_n}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{C_1 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{ccc} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{3C_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -3 & 2 & 15 \\ 1 & 3 & -12 \\ 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{-C_1 \to C_3} \left(\begin{array}{ccc} -3 & 2 & 18 \\ 1 & 3 & -13 \\ 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left(\frac{A'}{Q}\right)$$

per tant obtenim que $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ i compleix que

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 18 \\ 1 & 3 & -13 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

és a dir $AQ = A'$.

Fixeu-vos que les columnes de Q porten informació de combinació lineal, mirem la tercera columna de Q $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ com multiplica a la dreta la matriu A tenim:

3era columna de A'=0 columna 1 de A-1 Columna 2 de A+ 3 Columna 3 de A és a dir:

$$\begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definició 1.2.7. *Si la columna i d'una matriu A no és tota de zeros, anomenem pivot de la columna el primer element no nul d'aquesta (amb ordre de dalt a baix) i denotem per f_i la fila que ocupa aquest pivot.*

Diem que una matriu $A \in M_{m\times n}(K)$ està esglaonada per columnes si les columnes nul.les ocupen les posicions de més a la dreta (en cas de tenir-ne) i les columnes no zero satisfan:

$$f_1 < f_2 < f_3 < \dots$$

Fem uns exemples:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & \boxed{-4} \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 7 \end{pmatrix}, \textit{ tenim } f_1 = 1,\ f_2 = 3,\ f_3 = 1 \textit{ No esglaonada columnes}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \boxed{5} & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{4} & 0 \end{pmatrix},\ f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 4 \textit{ Esglaonada en columnes.}$$

Proposició 1.2.8. *Tota matriu $A \in M_{m\times n}(K)$ es pot transformar mitjançant transformacions elementals en columnes en una matriu esglaonada en columnes de tamany $m \times n$.*

Algoritme per a portar una matriu A a una esglaonada en columnes (algoritme iteratiu):

Consta de quatre passos:

1er pas: Triar la fila de més a dalt diferent de zero i triar un núnero d'aquesta fila diferent de zero que li diem pivot.

2on pas: Fent un canvi de columnes (operació elemental en columnes) possar el pivot triat al 1er pas a la columna de més a l'esquerra possible.

3er pas: Mitjançant l'operació $\lambda C_i \to C_j$ possar zeros a la dreta del pivot (en tota la fila que ocupa),

4rt pas: Eliminar imaginàriament la columna del pivot i totes les columnes de l'esquerra del pivot i mirar si queda alguna columna a la matriu, si es que no ja hem acabat l'algoritme, si es que si però totes les columnes son zero també hem acabat, si es que hi ha columnes que no son zero tornem al 1er pas (però pensem que hem tret imaginàriament columnes).

Anem a aplicar-ho a la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, trobem-hi una esglaonada en columnes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} =^{1er\ Pas} \begin{pmatrix} 3 & \boxed{1} & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow^{C_1 \leftrightarrow C_2, 2on\ Pas}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow^{-3C_1 \to C_2, 4C_1 \to C_3, 3er\ Pas} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -3 & 11 & -7 \\ 2 & -6 & 15 \end{pmatrix} =^{4rt\ Pas}$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -3 & 11 & -7 \\ 2 & -6 & 15 \end{array}\right) =^{1er\ Pas + 2on\ Pas} \left(\begin{array}{c|cc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -3 & \boxed{11} & -7 \\ 2 & -6 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{\frac{7}{11}C_2 \to C_3, 3er\ Pas}$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -3 & \boxed{11} & 0 \\ 2 & -6 & 123/11 \end{array}\right) =^{4rt\ pas} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -3 & \boxed{11} & 0 \\ 2 & -6 & 123/11 \end{array}\right) =^{1er + 2n + 3er + 4rt\ pas}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -3 & \boxed{11} & 0 \\ 2 & -6 & \boxed{123/11} \end{array}\right)$$

ens hem quedat sense matriu per tant aquesta última matriu està esglaonada per columnes.

1.3 Rang. Inversa. Determinant.

Anem primer a definir el concepte de rang:

Definició 1.3.1. *Donada una matriu $A \in M_{m\times n}(K)$ el rang de A és el nombre màxim de files de A que són K-linealment independents.*

L'anterior definició no ens és molt útil pel càlcul del rang, anem a fer el següent resultat que ens ajuda a com fer-ne el càlcul:

Teorema 1.3.2 (del Rang)**.** *Donada una matriu $A \in M_{m\times n}(K)$ els següents nombres són tots iguals:*

1. *$rang(A)$,*
2. *el nombre de pivots triats en transformar A en una matriu esglaonada en files fent transformacions elementals en files.*
3. *el nombre de files diferents de zero en una matriu esglaonada en files trobada a partir de A fent transformacions elementals en files.*

4. *al tamany de una submatriu quadrada maximal (maximal respecte el tamany de matriu) de A invertible (o amb determinant diferent de zero).*
5. *al nombre màxim de columnes de A que són K-linealment independents.*
6. *el nombre de pivots triats en transformar A en una matriu esglaonada en columnes fent transformacions elementals en columnes.*
7. *el nombre de columnes diferents de zero en una matriu esglaonada en columnes trobada a partir de A fent transformacions elementals en columnes.*

On la definició de determinant la farem un xic més endavant i una submatriu d'una matriu A és la que s'obté de treure certes files i columnes de A.

Anem a fer exemples de càlcul de rang per matrius (usem 2 o 3 per la noció de rang en els següents càlculs):

Hem vist en l'exemple d'abans que $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ l'esglaonàvem amb files via transformacions elementals en files i obteníem la matriu esglaonada a partir de A següent: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 41/7 \end{pmatrix}$ per tant el nombre de files diferents de zero de una esglaonada en files obtinguda a partir de la matriu A és 3 i per tant $rang(A) = 3$.

Anem a fer un altre exemple:

Calculeu el rang per la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -6 & -4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

Anem a trobar primer una matriu esglaonada en files a partir de A fent operacions elementals en files; el nombre de pivots que triarem fent aquest procés serà el rang de A.

$$=^{1er\ pas+2on\ pas} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -6 & -4 & 7 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow^{3F_1 \to F_2, -F_1 \to F_3, 2F_1 \to F_4, 3er\ pas}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} =^{4rtPas+1erPas} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^{F_2 \leftrightarrow F_3, 2onPas} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow^{\frac{7}{2}F_2 \to F_4, 3er\ Pas} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i acabem algoritme esglaonament, per tant té rang 2.

Observació 1.3.3. *Si $A \in M_{m \times n}(K)$ teniu que el $rang(A) \leq min(m,n)$.*

Proposició 1.3.4. *$rang(A) = rang(A^t)$.*

Ja hem definit en §1.1.1 que vol dir que una matriu sigui invertible. Anem a explicar aquí un algoritme via transformacions elementals en files per tal de decidir si és una matriu quadrada invertible o no i en cas de ser-ho com calcular-ho.

Proposició 1.3.5. *$A \in M_n(K)$ és invertible si i només si $rang(A) = n$ (si i només si $det(A) \neq 0 \in K$)*

Algoritme per a decidir si una matriu és invertible o no i en cas de ser-ho calcular-hi la matriu inversa (via transformacions elementals en files)

Pas 0': Fer algoritme d'esglaonament en files en A fins a obtenir una matriu esglaonada. Aquí calculem el rang. Si té una fila de zeros llavors no serà invertible. Si en aquesta esglaonada no té cap fila de zeros, segur que té tants pivots com el tamany de la matriu per tant serà una matriu amb rang n i per tant A és una matriu invertible.

Pas 0: En fer algoritme anterior del pas 0' no fem les operacions elementals en la matriu A sino en $(A|I_n)$ i obtenim $(E|P)$ on E és esglaonada. (NECESSITAREM AQUESTA P PER A CALCULAR LA INVERSA SI ES QUE EN TE).

El Pas0 i Pas 0' el fem conjuntament.

Si la matriu A no és invertible hem acavat. Si es que ho és seguim el procés següent FENT TOTES LES OPERACIONS ELEMENTALS EN LA MATRIU $(E|P)$ calculada en el pas 0:

1er pas: Triem el pivot de E que es més abaix de tot i mitjançant l'operació λF_i fem que aquest pivot valgui el valor 1.
2on pas: Fem zeros per sobre del pivot triat en el 1er pas via $\lambda F_i \to F_j$.
3er pas: Eliminem la fila del pivot triat al pas 1 i totes les de sota (PERO LES CONTINUEM ESCRIVINT TOTA L'ESTONA), si no queda matriu ja hem acabat l'algoritme, si es que encara tenim matriu tornem al 1er pas.

Un cop finalitzat obtenim

$$(I_n|\tilde{D})$$

llavors aquesta matriu quadrada $\tilde{D}$ compleix que $\tilde{D}A = I$ (relacioneu aquí en com era l'algoritme per a trobar "P") i per tant $\tilde{D} = A^{-1}$.

Anem a fer uns exemples.

Exemple 1: Decideix si la matriu A és invertible i en cas de ser-ho calcula la inversa on $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Anem a fer el Pas0+Pas0' que es tracta de l'algoritme d'esglaonament per a A però ara possant-hi la I_3 al costat i fent aquelles transformacions elementals en tota la fila ampliada:

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{-2F_1 \to F_2, F_1 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{-3F_2\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

tenim que el $rang(A) = 2$ i per tant no és invertible, (fixeu-vos que en l'última fila tenim la informació:

$$7(Fila\ 1\ de\ A) - 3(Fila\ 2\ A) + 1(Fila\ 3\ A) = (0,0,0),$$

i en particular obtenim que les files de A no són K-linealment independents i trobem una combinació lineal no trivial de manera explícita.)

Exemple 2: Decideix si la següent matriu A és invertible i en cas de ser-ho calcula la inversa on $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Anem a fer el Pas0+Pas0' que es tracta de l'algoritme d'esglaonament per a A però ara possant-hi la I_3 al costat i fent aquelles transformacions elementals en files en tota la matriu $(A|I_3)$:

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{-F_1\to F_2, -F_1\to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{-2F_2\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

fixem-nos que aquí acabem el pas 0+ pas0', i obtenim que la matriu A té rang 3 i com A té tamany 3 tenim que A és invertible. Anem continuant l'algoritme per a calcular A^{-1}:

$$=^{Pas\underline{1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\boxed{1}} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{-2F_3\to F_2, -F_3\to F_1, Pas\ \underline{2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\boxed{1}} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) =^{Pas\ \underline{3}+Pas\ \underline{1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{\boxed{1}} & 0 & -3 & 5 & -2 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{\boxed{1}} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow^{-F_2\to F_1, Pas\ \underline{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{\boxed{1}} & 0 & -3 & 5 & -2 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{\boxed{1}} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) =^{Pas\underline{3}+Pas\ \underline{1,2,3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\boxed{1}} & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{\boxed{1}} & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\boxed{1}} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

quan hem acabat a l'esquerra ens queda la matriu identitat i A^{-1} és la matriu de la dreta és a dir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anem ara a la definició de **determinant** d'una matriu quadrada A.
Si $A \in M_1(K)$ $A = (a)$ el $det(A) = a$.
Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ tenim:

$$detA = ad - bc, \in K$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(K)$ tenim:

$$detA = aei + dhc + gbf - ceg - fha - idb.$$

En general per una matriu A de tamany n es defineix de forma recursiva el determinant de A que també s'anota per $|A|$. Anem-ho a definir:

donada $A \in M_n(K)$ es defineix per $A_{i,j}$ la matriu obtinguda de la matriu A treient la fila i de A i la columna j de A (observeu $A_{i,j}$ té tamany $n-1 \times n-1$). Pel càlcul del $det(A)$ escollim una fila o columna concreta de A, si escollim la fila i de A obtenim:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(A_{i,j}).$$

(aquí i és fixa);
si escollim la columna j de A obtenim:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(A_{i,j})$$

(aquí j és fixa).

Exemple: Calculeu $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Desenvolupem per la 3era fila per exemple:

$$det(A) =$$

$$(-1)^{1+3}1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

aplicant formula per determinant 3×3.

Propietats del determinant $A \in M_n(K)$.

1. $det(A) = det(A^t)$.
2. Si A està esglaonada (en files o columnes) $det(A)$ és el producte dels elements de la diagonal (i.e. dels números $a_{i,i}$).
3. Si A' s'obté de A intercanviant dues files (o dues columnes) es té: $det(A') = -det(A)$.
4. Si A' s'obté multiplicant una fila (o columna) de A per un escalar λ, es té: $det(A') = \lambda det(A)$.
5. Si A' és la matriu que s'obté suman a una fila (resp. columna) de A una altra fila (resp. columna) de A multiplicada per un escalar, es té: $det(A') = det(A)$.
6. Si $B \in M_n(K)$ tenim
$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Exemple: Calculeu $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Anem a fer-ho pensant en les anteriors propietats:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =^{-F_1 \to F_2, -F_1 \to F_3, -F_1 \to F_4, propietat\ 5}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =^{-F_2 \to F_3, -F_2 \to F_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=^{-F_3 \to F_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =^{Propietat\ 2} 1$$

Fórmula de A^{-1} via determinants.

Recordem que $A \in M_n(K)$ és invertible si i només si té rang n si i només si $det(A) \neq 0$.

Definició 1.3.6. *Donada $A \in M_n(K)$ qualsevol és defineix la matriu adjunta de A i s'anota per $A^{ad} \in M_n(K)$ a la matriu $A^{ad} = (b_{i,j})$ on $b_{i,j}$ ve definit per:*

$$b_{i,j} := (-1)^{i+j} det(A_{i,j})$$

on recordeu que $A_{i,j}$ és la matriu que s'obté de A treient la fila i i la columna j de A.

Proposició 1.3.7. *Per qualsevol $A \in M_n(K)$ tenim:*

$$A(A^{ad})^t = (A^{ad})^t A = det(A) I_n.$$

Per tant si A és invertible tenim $det(A) \neq 0$ i obtenim
Fórmula per la inversa d'una matriu
Si $A \in M_n(K)$ té $det(A) \neq 0$ és invertible i la seva matriu inversa és:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} (A^{ad})^t.$$

Fem un exemple: Decidiu si la següent matriu es invertible i en cas de ser-ho calcula la inversa per $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Calculem primer el seu determinant. $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$ per tant com no ens dona zero tenim que la matriu A és invertible. Anem a calcular la matriu A^{ad} tenim:

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

per tant

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4 Sistemes d'equacions lineals

Definició 1.4.1. *Un sistema d'equacions lineals en K (o a coeficients en K) amb n incògnites (diem-les-hi $x_1, \ldots, x_n$) i m equacions és una expressió de la forma:*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

on $a_{i,j}$ i b_k són números de K.

Recordem que un sistema el podem escrire de la forma matricial com:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

on $A = (a_{i,j})$ amb $A \in M_{m\times n}(K)$.

També escriurem de manera matricial el sistema:

$$(A|b) := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \vdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \vdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \vdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right).$$

En aquest secció ens plantegem buscar solucions en K per les incògnites per tal que satisfacin les m equacions simultàneament.

Observació 1.4.2. *(Opcional) Recordem aquí que l'equació d'una hipersuperfície lineal a K^n ve donada per les solucions d'una equació del tipus $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ amb a_i, b números de K i $x_1, \ldots, x_n$ incògnites, per tant la búsqueda de la solució d'un sistema d'equacions lineals és trobar on hi ha (si es que és no buida) la intersecció de les m hipersuperficies definides per les m equacions.*

Per exemple quan $n = 3$ i $K = \mathbb{R}$ buscar solucions en $\mathbb{R}^n$ d'un sistema d'equacions lineals (en $\mathbb{R}$) amb tres incògnites i dues equacions, es buscar l'intersecció dels dos plans que defineixen cadascuna de les equacions (gràficament veieu que hi ha tres opcions: que els dos plans no es tallin (no hi ha solució llavors), que es tallin en una recta (hi ha moltes solucions totes les de sobre un recta), que siguin ambdos plans el mateix (hi ha moltes solucions, tot el plà).

Fet Important: Si un sistema lineal en K amb n incògnites té solució, llavors la solució del sistema és una subvarietat lineal de K^n, és a dir la suma d'un punt sumat un nombre de vectors K-linealment independent (ja definirem més endavant aquest concepte de vector), i el nombre d'aquests vectors és el que direm el grau de llibertat del sistema.

Fet a recordar: Un sistema homogeni és el que té $b_i = 0$ per a tot i. Observeu llavors que $x_1 = \ldots = x_n = 0$ és sempre una solució del sistema, per tant els sistemes homogenis sempre tenen solució.

Definició 1.4.3. *Diem que un sistema és compatible si té solució. A més si sol té una solució direm que el sistema és compatible determinat i si en té més d'una direm que és un sistema compatible indeterminat. Si el sistema no té solució direm que és un sistema incompatible.*

1.4.1 Mètode de Gauss. Regla de Cramer.

En busca de les solucions d'un sistema. Mètode de Gauß.

Consisteix en adonar-nos dels següent fets:

Les solucions d'un sistema no canvien si:

-Canviem d'ordre dues equacions dels sistema, per exemple intercanviem l'equació i amb l'equació j.

-Multipliquem una equació per un número de K, NO NUL.

-Sumem a una equació un múltiple d'una altra equació.

Fixeu-vos que amb la notació matricial de sistema $(A|b)$ tenim que els anteriors guions - corresponen respectivament a:

-Permutar dues files, $F_i \leftrightarrow F_j$.

-Multiplicar per un escalar $\lambda \in K$ NO NUL la fila i.

-Fer l'operació $\lambda F_i \to F_j$.

És a dir per a resoldre un sistema podem esglaonar per files la matriu $(A|b)$ (ja que en el procés d'esgalonament en files únicament feiem les operacions elementals anteriors) obtenim un altre sistema AMB LES MATEIXES SOLUCIONS.

Mètode de Gauss: Donat un sistema en forma matricial $(A|b)$ prenem-ho com una matriu i esglaonem-la amb files aquesta matriu $(A|b)$ fins a obtenir $(A'|b')$ (una matriu esglaonada en files) llavors les solucions de $Ax = b$ són les mateixes que $A'x = b'$. Els sistemes on $(A|b)$ és ja una matriu esglaonada els hi direm sistemes esglaonats.

Exemple: Transformeu el sistema lineal següent usant el mètode de Gauss en un sistema esglaonat que tingui les mateixes solucions:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = 2 \\ x - y - z + t = 3 \end{cases}$$

Anem a esglaonar $(A|b)$ en files per a obtenir un sistema esglaonat amb les mateixes solucions que el nostre sistema inicial;

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{-F_1 \to F_2, -F_1 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow^{-F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-2}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-2}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

i obtenim que l'última matriu està esglaonada amb files obtenim així el sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ \quad -2y = 1 \\ \quad -2z = 1 \end{cases}$$

Les seves solucions són exactament les mateixes que el sistema inicial.

I com resoldre un sistema $A'x = b'$ on $(A'|b')$ és esglaonat per files? Molt fàcil:

-Si hi ha un pivot en la columna b' vol dir que el sistema no té solució, perqué tenim una equació de tipus $0 = 0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b$ amb $b \neq 0$ cosa que és impossible.

Exemple: Considem el sistema en $\mathbb{R}$ donat per:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

observeu que està esglaonat en files, $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}\right)$ i observeu que l'última equació és $0x + 0y + 0z = 3$ per tant Sistema Incompatible.

-Si no hi ha cap pivot en la columna de b' és un sistema compatible (recordeu que $(A'|b')$ és esglaonat en files). És determinat si tenim que el rang de la matriu és igual al nombre d'incògnites, serà indeterminat en cas contrari. Anem a explicar el procediment. Prodriem fer el següent algoritme:

a) Triem el pivot de més abaix,

b) aillem la variable que li correspondria el pivot.

c) eliminem ara aquesta fila d'aquest pivot i tornem al pas a) (en cas de quedar-nos encara files) substituint a partir d'ara la variable aillada en el pas b) pel valor que li donàven en b).

Exemple/-s: Considem el sistema en $\mathbb{R}$ donat per:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

observeu que està esglaonat en files, $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 \end{array}\right)$ i observeu que cap pivot es troba en la columna de les $b's$ per tant és Sistema Compatible, a més és determinat. Anem a calcular-ho: el pivot de més abaix és el $\boxed{2}$ tenim l'equació

$$2z = 3 \textit{ aillem } z \textit{ per tant } \boxed{\text{z=3/2}}.$$

Tot seguit triem el següent pivot (de baix a dalt), triem el pivot $\boxed{3}$ tenim l'equació:

$$3y + z = 1, \textit{ aillem } y, \textit{ obtenim } y = \frac{1-z}{3} \textit{ pero } z = 3/2 \textit{ per tant } y = -1/6$$

(aquí recordeu que un cop aillada una variable anterior CAL substituir-la pel valor obtingut en els següents pasos).

Finalment triem el següent pivot (de baix a dalt), triem el pivot $\boxed{1}$ tenim l'equació:

$$\boxed{1}x + y + z = 1, \textit{ aillem } x, \textit{ obtenim } x = 1 - y - z = 1 + \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -1/3$$

obtenim així que el sistema és compatible determinat i la solució és $x = -1/3$, $y = -1/6$ i $z = 3/2$.

Un altre exemple. Considem el sistema en $\mathbb{R}$ donat per:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

observeu que està esglaonat en files, $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ i observeu que cap pivot es troba en la columna de les $b's$ per tant és Sistema Compatible, a més és indeterminat ja que hi ha dos pivots i tenim 3 incògnites. Anem a calcular-ho: el pivot de més abaix és el $\boxed{3}$ tenim l'equació

$$\boxed{3}y + 2z = 1 \textit{ aillem } y \textit{ per tant } \boxed{\text{y=(1-2z)/3}}.$$

Tot seguit triem el següent pivot (de baix a dalt), triem el pivot $\boxed{1}$ tenim l'equació:

$$\boxed{1}x + y + z = 1, \textit{ aillem } x, \textit{ obtenim } x = 1 - y - z = 1 - \frac{1-2z}{3} - z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}z$$

(aquí recordeu que un cop aillada una variable anterior CAL substituir-la pel valor obtingut en els següents pasos).

obtenim així que el sistema és compatible Indeterminat (amb 1 grau de llibertat) i la solució és $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}z$, i $y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}z$. (Fixeu-vos que la variable on no hi ha cap pivot ens queda lliure en aquesta metodologia de resolució).

Per tant el mètode de Gauss ens dona una maner fàcil per a resoldre qualsevol sistema ja que el transforma en un esglaonat i aquests com acabem de veure son fàcils de resoldre:

Resoleu el següent sistema en $\mathbb{R}$ donat per:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = 2 \\ x - y - z + t = 3 \end{cases}$$

Hem vist abans usant el mètode de Gauss que el podem transformar amb el sistema esglaonat següent:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ara resolem-lo fixem-nos que és Sistema Compatible, a més és indeterminat (4 incognites, i sol tenim 3 pivots),

obtenim així

$$-2z + 0t = 1 \textit{ per tant } z = -1/2$$

seguim el procés:

$$-2y + 0z + 0t = 1 \ per\ tant\ y = -1/2$$

i finalment

$$\boxed{1}x + y + z + t = 1, \ per\ tant\ x = 1 - y - z - t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - t = 2 - t,$$

per tant la solució és $x = 2 - t$, $y = -1/2$ i $z = -1/2$ fixeu-vos que la t queda lliure que era la variable on no hi havia cap pivot marcat.

Fixeu-vos que en el procès anterior obtenim el següent resultat ja que donat $(A|b)$ un sistema obtenim un d'esglaonat en files $(A'|b')$ on $rang(A) = rang(A')$ i $rang(A|b) = rang(A'|b')$ i observeu que el $rang(A) \neq rang(A|b)$ si i només si hi ha un pivot en la columna b':

Teorema 1.4.4 (Rouché-Frobenius)**.** *Donat un sistema de m-equacions i n-incognites (en K), escrivim-ho en forma matricial per $(A|b)$. Llavors es té:*

1. *És un sistema incompatible si i només si $rang(A) \neq rang(A|b)$.*
2. *És un sistema compatible si i només si $rang(A) = rang(A|b)$. En aquest cas tenim:*
   (a) *És determinat si i només si $rang(A) = rang(A|b) =$ número d'incògnites.*
   (b) *És indeterminat si i només si $rang(A) = rang(A|b) <$ número d'incògnites. S'anomena en aquesta situació el grau de llibertat del sistema al nombre: (número d'incògnites)-$rang(A)$.*

Estudia en funció de $a \in \mathbb{R}$ quan el següent sistema a coeficient reals té solució i quan no.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

Anem a esglaonar en files l'anterior matriu (pensem $a \in \mathbb{R}$) Recordeu que per agafar un pivot ha de ser un número diferent de zero, per tant si volem agafar com a pivot un nombre amb un paràmetre CALDRA ESPECIFICAR QUE ESTEM EN EL CAS QUE ES DIFERENT DE ZERO I EL CAS QUE ES ZERO FER-HO APART!!!!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -a & -1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & a \end{array}\right) \rightsquigarrow_{F_1 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -a & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{-F_1 \to F_2, F_1 \to F_3, -aF_1 \to F_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & \boxed{2} & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{2} & 1-a & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow_{\frac{1-a}{2}F_2\to F_3,\frac{a-1}{2}F_2\to F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{2} & 1-a & a-1 \\ \hline 0 & 0 & (1-a)^2/2 & (1-a)(a+1)/2 \\ 0 & 0 & (1-a)(1+a)/2 & (1-a)(3+a)/2 \end{array}\right) (\#)$$

fixem-nos que ara per continuar l'algoritme cal triar un pivot per les files sota el pivot $\boxed{2}$ i tot depèn de a caldrà distingir situacions:

1. Cas $\underline{(a-1)^2/2 \neq 0}$, és a dir $a \neq 1$: en aquest cas podem seguir el procés d'esglaonament com segueix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{2} & 1-a & a-1 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{\text{(a-1)(a-1)/2}} & (1-a)(1+a)/2 \\ 0 & 0 & (1-a)(1+a)/2 & (1-a)(3+a)/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{\frac{-(1-a)(1+a)}{(1-a)^2}F_3\to F_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{2} & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{(a-1)(a-1)/2}} & (1-a)(a+1)/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -a^2-2a+1 \end{array}\right)$$

Fixem-nos ara si $-a^2-2a+1=0$ ja estaria esglaonada i podem fer el càlcul dels rangs, si en canvi $-a^2-2a+1 \neq 0$ triaríem com a pivot, posem sota a zeros i acabaríem el procès d'esglaonament, però fixeu-vos que en ambdues situacions ja no fem mes canvis en la matriu anterior per tant ja podem fer els argument dels rangs, obtenim així:

$$rang(A) = 3$$

ja que treient la última columna, sigui la situació que sigui sol hi ha 3 files no zero i cadascuna d'aquesta ja teniem un pivot,

$$rang(A|b) = \begin{cases} 3, & si\ a^2+2a-1=0\ si\ a=-1\pm\sqrt{2} \\ & (CAS\ a=1\ A\ PART, RECORDEU-HO) \\ 4, & si\ a\neq -1\pm\sqrt{2}, 1 \end{cases}$$

Per tant per Rouché-Frobenius:

El sistema es incompatible per $a \neq -1\pm\sqrt{2}, 1$. Per $a=-1\pm\sqrt{2}$ és un sistema compatible (i com el número d'incognites és 3 és) Determinat.

El cas $a=1$ no es tracta aqui ja que el procés per esglaonar no es el d'aquest apartat (fixeu-vos que aqui com a pivot hem triat $\boxed{\text{(a-1)(a-1)/2}}$.

2. Cas $\underline{(a-1)^2/2 = 0}$, és a dir $a=1$, substituint la a obtenim de (#):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

i observeu que està esglaonada, sense cap pivot en la columna dels $b's$ per tant $rang(A) = rang(A|b)$ que és igual a 2, és un sistema compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat quan $a = 1$.

Una situació molt concreta. Regla de Cramer

Recordem primer la resolució d'una equació de primer grau a coeficients en K: volem resoldre

$$ax + c = b$$

amb $a, b, c \in K$ números fixats (amb $a \neq 0$), el que feu és aïllar la x i per això fèieu el següent procés (un procés que es pot desfer i tornar endarrera!!!):

$$ax + b = c \Leftrightarrow ax = c - b$$

que consisteix a sumar a ambdos costats de la igualtat per $-b$ (usualment us dèien que passàveu restant, però recordeu que sol tenim dues operacions en K suma i producte i la resta és una suma i la divisió és un producte en K),

$$ax = b - c \Leftrightarrow x = a^{-1}(b - c)$$

on per fer aquest pas hem usat que a té invers, propietat que en K ho té tot nombre diferent de zero.

Anem a fer aquest procés per matrius. Suposem ara una equació matricial

$$AX + B = C$$

amb $A \in M_{m\times n}$, $X \in M_{n\times r}$ matriu incògnita, $B, C \in M_{m\times r}$ i intentem aillar la X,

$$AX + B = C \Leftrightarrow AX = C - B,$$

però per aillar la X necessitem A invertible, per tant $m = n$ i hem d'imposar que A és invertible, i ara importa el costat que multipliquem (recordeu en matrius $AB \neq BA$ usualment!!!), per tant

$$A \in M_n(K) \ invertile: \ AX = C - B \Leftrightarrow X = A^{-1}(C - B).$$

Suposem $A \in M_n(K)$ invertible i $B, C \in M_{m\times n}(K)$ llavors comproveu que la solució $X \in M_{m\times n}$ per la equació

$$XA + B = C$$

és $X = (C - B)A^{-1}$.

Proposició 1.4.5 (Regla de Cramer)**.** *Sigui un sistema $(A|b)$ amb n incògnites i n-equacions (per tant $A \in M_n(K)$). Llavors és un sistema compatible determinat si i nomes si A és invertible (si i només si $det(A) \neq 0$) i en aquest cas la solucio és:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

més explícitament sigui $A * i$ la matriu que s'obté canviant la columna i de A per la columna de $b's$ llavors

$$x_i = \frac{det(A * i)}{det(A)}.$$

Si $det(A) = 0$ llavors el sistema és compatible indeterminat o sistema incompatible.

Exemple. Trobeu els valors de $a \in \mathbb{R}$ per tal que el següent sistema en $\mathbb{R}$ és compatible determinat o no. En els casos que és un sistema compatible determinat troba'n la solució.

$$\left\{ \begin{array}{c} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ -x + y + az = -1 \end{array} \right.$$

Per a estudiar els casos on és compatible o no, podriem fer-ho com en l'exemple de després del teorema de Rouché-Frobenius d'aquests apunts, no obstant com ara A és quadrada tenim més avantatge i podeu usar la regla de Cramer anterior, anem a fer-ho usant la regla de Cramer (fixeu-vos que a més no ens demana l'enunciat que en els casos que no és sistema compatible determinat que explicitem quan és incompatible i quan és sistema compatible indeterminat).

Fixem-nos $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ i observem que $det(A) = (a+1)a(a-1)$, per tant per $a \neq 0, 1, -1$ és un sistema compatible determinat (per Cramer). Per $a = 0$, o 1 o -1 no serà un sistema compatible determinat (però no sabem si serà incompatible i/o sistema compatible indeterminat).

Anem a trobar la solució pels casos que és sistema compatible determinat, tenim que és donat per:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{(1+a)(a-1)}{(a+1)a(a-1)} = \frac{1}{a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{(1+a)(a-1)}{(a+1)a(a-1)} = \frac{1}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{-(a-1)(a+1)}{(a+1)a(a-1)} = -\frac{1}{a},$$

obtenim així la solució del sistema compatible determinat aplicant la regla de Cramer.

1.4.2 Les solucions d'un sistema com un Punt i uns vectors .

Anem a donar de manera més explicita la solució d'un sistema lineal compatible com una subvarietat lineal, és a dir com la suma d'un punt per certs vectors.

Observem primèrament que les solucions d'un sistema són les K-combinacions lineals de les columnes de la matriu A que donen igual a la columna b, comencem per intentar entendre aquesta última frase amb un exemple:

considerem el sistema $\begin{cases} 3x+4y+6z=8 \\ 2x-4y+5z=13 \end{cases}$

Podem escriure el sistema com:

$$x\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Observeu que buscar solucions del sistema és buscar les K-combinacions lineals de les columnes de A que donen igual a la columna $\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$.

A més si tenim dues solucions del sistema (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) la resta (és a dir $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$) és solució del sistema homogeni associat:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$(x_1 - x_2)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (y_1 - y_2)\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + (z_1 - z_2)\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anem a escrivir-ho això en general.

Donat un sistema en K arbitrari:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

podem escriure-ho com

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

per tant buscar les solucions d'un sistema és equivalent a obtenir les K-combinacions lineals de les columnes de A que donen la columna d'indeterminades de les $b's$.

Definició 1.4.6. *Donat un sistema lineal en* K

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right.$$

s'anomena el sistema lineal homogeni associat al sistema anterior, al sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = 0 \end{array}\right.$$

Teorema 1.4.7. *Donat un sistema homogeni en* K *(recordeu que sempre és COMPATIBLE els sistemes homogenis)*

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = 0 \end{array}\right.$$

hi ha $s := n - rang(A)$*-*K*-combinacions lineals* $v_1, \ldots, v_s$ *complint que tota altra solució del sistema és* K*-combinació lineal de* $v_1 \ldots, v_s$ *i a més* $v_1, \ldots, v_s$ *són* K*-linealment independents, si* $s = 0$ *l' única solució al sistema és* $x_1 = \ldots = x_n = 0$*. Aquest* s *és el grau de llibertat del sistema.*

Teorema 1.4.8. *Donat un sistema lineal en* K *COMPATIBLE*

$$(***)\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Sigui $v_1, \ldots, v_s$ *els "vectors" que generen totes les solucions del sistema homogeni associat a aquest sistema donats pel teorema anterior.*

Llavors, tota solució del sistema (***) consisteix en una solució concreta fixa del sistema (***) sumada a una K*-combinació lineal dels* $v_1, \ldots, v_s$*.*

Anem a explicar aquí com calcular $v_1, \ldots, v_s$**.** Donat un sistema lineal homogeni

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = 0 \end{array}\right.$$

recordeu que buscar-ne les solucions es buscar les K-combinacions lineals de les columnes igualades a zero

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fixeu-vos que si les columnes són K-linealment independents sol hi ha la solució que tot ha de ser zero, si és que NO, hi ha una combinació lineal de les columnes, per tant en el càlcul del rang en columnes, una columna almenys s'hauria d'eliminar en el procés d'esglaonament en columnes (i aquesta K-combinació es guardava en una matriu que deiem Q, recordeu? subsecció §1.2 d'aquests apunts).

Anem a fer-ho primer en un exemple (abans d'escriure l'algoritme general):

Considerem el sistema homogeni en $\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Fixeu-vos que podem escriure'l com

$$x\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cal buscar combinacions lineals d'aquestes columnes igual a zero per això esglaonem en columnes en $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ però posem la I_3 i esglaonem en columnes en tot ja que aquesta matriu de sota ens dona les combinacions lineals:

$$\left(\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 3 & 6 \\ 2 & -4 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{-C_1\to C_2, -2C_1\to C_3} \left(\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-6} & 3 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{C_2/2\to C_3} \left(\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-6} & 0 \\ \hline 1 & -1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

per tant tenim que la solució del sistema ve generada per $(-5/2, 1/2, 1)$ (la combinació lineal que obtenim en les columnes que es possen zero en esglaonar la matriu A) és a dir el sistema té un grau de llibertat i les solucions (x, y, z) són

$$(x, y, z) = \beta(-5/2, 1/2, 1)$$

amb β un nombre arbitrari.

Algoritme per a trobar els generadors de les solucions d'un sistema homogeni.

Considerem un sistema homogeni arbitrari,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1er pas: Esglaoneu amb columnes A però fent l'algoritme de esglaonament amb columnes amb la matriu ampliada $\left(\frac{A}{I_n}\right)$ (on parem l'algoritme quan A està esglaonada) . Obté així $\left(\frac{A'}{Q}\right)$.

2on pas: les columnes de la matriu A' que són zero, és el nombre s els graus de llibertat del sistema, i les columnes de Q que és troben sota aquestes columnes de zero de A' son els vectors $v_1, \ldots, v_s$ que buscàvem. (Fixeu-vos que aquests $v_1, \ldots, v_s$ són K-linealment independents, ja que són columnes de la matriu Q que és invertible i per tant té rang n i per tant totes les columnes de Q són K-linealment independents).

Exemple: Resolt el sistema homogeni en $\mathbb{C}$ següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anem a esglaonar la matriu A del sistema amb columnes,

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{-2C_1 \to C_2, -3C_1 \to C_3, -4C_1 \to C_4} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow_{-C_2 \to C_3, -2C_2 \to C_4} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

per tant, el sistema té grau de llibertat 2 i la solució ve generada per $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, i $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, per tant la solució del sistema homogeni és:

$$(x, y, z, t) = \beta(-1, -1, 1, 0) + \gamma(0, -2, 0, 1)$$

amb $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

1.4.3 PAQ-reducció. La inversa generalitzada. Un anàleg a la regla de Cramer per a S.C.Indeterminats.

• PAQ-reducció.

Donada una matriu $A \in M_{m\times n}(K)$ trobar una PAQ-reduccó de A és trobar matrius invertibles $P \in M_m(K)$ i $Q \in M_n(K)$ complint:

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{m\times n}(K)$$

amb $r = rang(A)$.

Proposició 1.4.9. *Donada $A \in M_{m\times n}(K)$ sempre es poden trobar P i Q invertibles de manera que*

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{m\times n}(K)$$

amb $r = rang(A)$.

Algoritme per a trobar una P *i una* Q *i obtenir una* PAQ*-reducció.* Considerem $A \in M_{m\times n}(K)$ que volem trobar-ne una PAQ-reducció.
1er Pas: Escrivim $(A|Id_m)$ i apliquem algoritme d'esglaonament en files per a A fina a obtenir $(A'|P)$ on A' és una matriu esglaonada en files obtinguda de A.
2on Pas: Considerem la matriu esglaonada en files A' trobada en el primer pas d'aquest algoritme. Considerem la matriu

$$\left(\begin{array}{c} A' \\ \hline\hline Id_n \end{array}\right)$$

i apliquem l'algoritme d'esglaonament en columnes en tota aquesta matriu volent esglaonar en columnes la matriu A' però triem per pivots els triats en l'esglaonament en files i IMPOSSEM AQUI QUE AQUETS PIVOTS ELS CONVERTIM TOTS EN EL VALOR 1 (multiplicant la columna convenientment), llavors obtenim

$$\left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\hline \multicolumn{2}{c}{Q} \end{array}\right)$$

3er Pas, la conclusió: Llavors un obté que la P obtinguda del 1er Pas i la Q del segon pas un obté una PAQ-reducció

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Exemple 1.4.10. *Trobeu una* PAQ*-reducció per* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Anem a aplicar l'algoritme anterior.
1er Pas: Esglaonem en files A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow^{-2F_1\to F_2, -F_1\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow^{-F_2\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = (A'|P)$$

Per tant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2on Pas: Esglaonem amb columnes A' però fent que els Pivots tinguin el valor 1 exactament.

$$\left(\begin{array}{c} A' \\ \hline\hline Id_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{-C_1 \to C_2, -2C_1 \to C_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow_{-C_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow_{3C_2 \to C_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on hem acabat l'algoritme i obtenim que $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i per tant en el pas 3 podem comprobar si volem (la teoria afirma que SI) que amb la P triada i la Q triada tenim

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i tenim que el rang de A és 2.

• **Matriu inversa generalitzada.**

Aquí sol ho fem per a matrius quadrades. Únicament deixar-vos per escrit que hi ha una generalizació per matrius no necessàriament quadrades.

Definició 1.4.11. $A \in M_n(K)$. *Una matriu* $G \in M_n(K)$ *s'anomena UNA inversa generalitzada de* A *si compleix la propietat:*

$$AGA = A.$$

Observació 1.4.12. *Si* $A \in M_n(K)$ *és invertible llavors* $G = A^{-1}$ *compleix la propietat de la definició de inversa generalitzada (i d'aquí el nom).*

Proposició 1.4.13. *TOTA* $A \in M_n(K)$ *té inversa generalitzada.*

Algoritme constructio com donada A *trobar UNA inversa generalitzada* G *per a* A.

1er Pas: Calculem una PAQ-reducció per a la matriu A, tenim

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

2on Pas: Definim
$$G := Q\left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P,$$
i G és una inversa generalitzada.

Observació 1.4.14. *(Justificació perquè és una inversa generalitzada) Observem que*
$$AGA = AQ\left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)PA =^{?} A$$
multiplicant per P per l'esquerra i Q per la dreta (ho podem fer ja que son invertibles obtenim que la igualtat a provar és equivalent a:
$$PAQ\left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)PAQ =^{?} PAQ$$
és a dir
$$\left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) =^{?} \left(\begin{array}{c|c} Id_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
i es aquesta última igualtat molt fàcil de verificar.

Exemple 1.4.15. *Donada* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *(observeu $det(A) = 0$), trobeu-ne una matriu inversa generalitzada.*

Anem a fer l'algoritme.
1er Pas: Trobar una PAQ-reducció. LA A és la mateixa que en l'exemple 1.4.10, per tant podem triar $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ amb $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} Id_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_3(K)$.

2on Pas:
$$G := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
que és UNA inversa generalitzada, comprovem-ho:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• **Aplicació de la matriu inversa generalitzada en la resolució de sistemes d'n equacions amb també n incògnites que són Sistemes Compatibles INDETERMINATS. (Un anàleg a la Regla de Cramer per S.C.I.)**

Considerem un sistema lineal amb n incògnites i n equacions que és un sistema compatible Indeterminat:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b,\ A \in M_n(K),\ b \in M_{m\times 1}(K)$$

amb $rang(A) = rang(A|b) = m < n$.

Proposició 1.4.16. *(Anàleg de la regla de Cramer però per S.C.I.) En aquesta situació les solucions del sistema són:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Gb + (GA - Id_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

on α_i son paràmetres, on G denota Una inversa generalitzada de A (i els graus de llibertat del sistema correspon al rang de $GA - Id_n$).

Observació 1.4.17. *(Justificació de la regla anterior)És fàcil observar que són solucions del sistema i es el que únicament escriuré en aquests apunts. Efectivament:*

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AGb + \underbrace{A(GA - Id_n)}_{0}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = AGb$$

com el sistema és compatible, existeix $(a_1, \ldots, a_n)$ solució concreta on $A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b$ per tant podem pensar que

$$b = A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = AGA\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = AGb$$

i per tant obtenim que les solucions proposades en la proposició anterior són solucions del sistema.

Exemple 1.4.18. *El sistema següent:*

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - z = 1 \end{array}\right. ;$$

és un Sistema compatible Indeterminat. Troba'n les solucions usant la proposició anterior.

Escrivim el sistema per

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hem de calcular una inversa generalitzada de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ja que sabem que el sistema és S.C.I. i volem aplicar-hi la fórmula de la proposició anterior, però observem que en l'exemple 1.4.15 hem calculat una inversa generalitzada

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant obtenim que les solucions del sistema són:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma \\ 3\gamma \\ -\gamma \end{pmatrix}.$$

Bibliografia

[1] *F.Bars*: Propietats bàsiques dels números. En trobeu còpia a: http://mat.uab.es/∼francesc/docencia2.html o al DDD de la UAB.

[2] *Enric Nart*: Notes d'Àlgebra Lineal. Materials de la UAB número 130.